

**М. А. ТКАЧУК, А. В. ГРАБОВСЬКИЙ, М. М. ТКАЧУК, А. О. ЗАРУБІНА, М. С. САВЕРСЬКА,
Д. С. МУХІН, С. В. КУЦЕНКО**

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕМЕНТІВ ПРЕС-ФОРМ ТА ПРОЕКТНО-ТЕХНОЛОГІЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЇХ ТЕХНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для аналізу функціональних властивостей прес-форм необхідно визначати напружено-деформований стан їхніх елементів. Це пояснюється тим, що прес-форми є сукупністю багатьох деталей, які перебувають одна із одною у контактній та силовій взаємодії. Для цього розроблена математична модель напружено-деформованого стану елементів прес-форм. Ця модель ураховує дію зусиль запирання прес-форм та дію внутрішнього тиску робочого матеріалу, який перебуває у рідкому стані, на поверхню напівматриць. Крім того, на поверхні деталей, які перебувають у сполученні, діють умови контактної взаємодії. Ця математична модель реалізована у вигляді сукупності параметричних моделей та програмних модулів. Із використанням цих засобів визначені характерні особливості поведінки прес-форм при здійсненні технологічних операцій пресування деталей із пластмас. Визначені особливості деформування основних деталей, які забезпечують міцність, жорсткість, точність роботи та якість деталей, що виготовляються на цих прес-формах. Здійснено аналіз одержаних результатів. Сформовані відповідні рекомендації.

Ключові слова: прес-форма; напружено-деформований стан; контактна взаємодія; міцність; жорсткість; параметрична модель; метод скінченних елементів

**Н. А. ТКАЧУК, А. В. ГРАБОВСКИЙ, Н. Н. ТКАЧУК, А. А. ЗАРУБИНА, М. С. САВЕРСКАЯ,
Д. С. МУХИН, С. В. КУЦЕНКО**

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЕСС-ФОРМ И ПРОЕКТНО- ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИХ ТЕХНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Для анализа функциональных свойств пресс-форм необходимо определять напряженно-деформированное состояние их элементов. Это объясняется тем, что пресс-формы представляет собой совокупность многих деталей, которые находятся друг с другом в контактном и силовом взаимодействии. Для этого разработана математическая модель напряженно-деформированного состояния элементов пресс-форм. Эта модель учитывает действие усилий запирання пресс-форм и действие внутреннего давления рабочего материала, который находится в жидком состоянии, на поверхность полуматриц. Кроме того, на поверхности деталей, находящихся в контакте, действуют условия контактного взаимодействия. Эта математическая модель реализована в виде совокупности параметрических моделей и программных модулей. С использованием этих средств определены характерные особенности поведения пресс-форм при осуществлении технологических операций прессования деталей из пластмасс. Определены особенности деформирования основных деталей, которые обеспечивают прочность, жесткость, точность работы и качество изготавливаемых деталей на этих пресс-формах. Осуществлен анализ полученных результатов. Сформированы соответствующие рекомендации.

Ключевые слова: пресс-форма; напряженно-деформированное состояние; прочность; жесткость; параметрическая модель; метод конечных элементов

**М. А. ТКАЧУК, А. ГРАБОВСКИЙ, М. М. ТКАЧУК, А. ЗАРУБИНА, М. САВЕРСКА, Д. МУХИН,
С. КУТСЕНКО**

CONTACT INTERACTION OF MOLDS ELEMENTS AND PROJECT-TECHNOLOGICAL PROVI- SION OF THEIR TECHNICAL

To analyze the functional properties of molds, it is necessary to determine the stress-strain state of their elements. This is due to the fact that the molds are a set of many parts that are in contact with each other in a power and interaction relationship. To do this, a mathematical model of stress-strain state of molds elements has been developed. This model takes into account the effect of molds locking efforts and the action of the internal pressure of the working material, which is in liquid state, on the surface of the semimatrices. In addition, the conditions of contact interaction process are in place on parts surface that are in combination. This mathematical model is implemented as a set of parametric models and software modules. Using these tools, characteristic features of molds behavior are determined in the implementation of technological operations of pressing plastics parts. Certain features of main parts deformation are determined that provide strength, toughness, accuracy and quality of molds manufactured parts. The analysis of the received results is carried out. Formal recommendations made.

Keywords: mold; stress-strain state; strength; stiffness; parametric model; finite element method

Вступ. У сучасному машинобудуванні одна із найбільш поширених технологічних операцій – пресування деталей у прес-формах (ПФ). Таким способом виготовляються деталі із металів та сплавів, із пластиків та композиційних матеріалів тощо. Перевагами такого способу виготовлення деталей є висока продуктивність процесу. Наприклад, пластикова деталь виготовляється шляхом заливки розплавленого матеріалу у прес-форму, яка розміщується на термопластавтоматі, протягом циклу, який триває від декількох до десятків секунд. Перевагою такого процесу є також та обставина, що таким шляхом можливе виготовлення деталей дуже складної форми. Потрібно лише виготовити відповідні формотвірні деталі (напівматриці), підібрати режими нагріву, впорскування та тиску на робочу рідину у формотвірній порожнині.

Разом із тим при формуванні проектно-технологічних параметрів прес-форм на перший план виступають умови міцності, жорсткості, точності та якості виконання технологічних операцій, які зумовлені напружено-деформованим станом (НДС) елементів ПФ. Зважаючи на значну кількість деталей, які складають ПФ та знаходяться в умовах контактної взаємодії (КВД), можна стверджувати, що основні технічні характеристики прес-форм залежать від умов контактного сполучення деталей ПФ. Це передбачає необхідність аналізу НДС елементів ПФ із урахуванням КВД.

© М. А. Ткачук, А. В. Грабовський,
М. М. Ткачук, А. О. Зарубіна, М. С. Саверська,
Д. С. Мухін, С. В. Куценко, 2019

Відповідно, розробка моделей, методів та здійснення такого аналізу є метою цієї роботи.

Аналіз існуючих моделей, методів та засобів досліджень. Прес-форма є елементом технологічної системи, який розміщується на відповідному обладнанні та забезпечує базування, силове замикання та формоутворення деталей із розплавленого робочого матеріалу. Прес-форми мають різноманітні конструктивні рішення та технологічні режими роботи [1]. Разом із тим для них спільною рисою є те, що усі елементи ПФ знаходяться в умовах КВД. Для дослідження НДС системи пружних тіл із урахуванням КВД на сьогодні застосовуються різноманітні методи [2–4]. Вони реалізують підходи, які базуються на теорії варіаційних нерівностей [5, 6], методах граничних інтегральних рівнянь [7, 8], модифікаціях методу скінченних елементів (МСЕ) [9, 10].

Ці методи і моделі володіють суттєвими перевагами: універсалізм, можливість урахування значної кількості чинників, наявність великої кількості потужних програмних комплексів, які реалізують той чи інший метод або модель. Разом із тим, цим засобам досліджень властиві також і певні недоліки. Це, по-перше, неадекватність щодо урахування низки чинників, важливих для тих чи інших конструкцій, у т.ч. – прес-форм. Зокрема, мова йде про вплив нелінійних проміжних та поверхневих шарів на КВД деталей досліджуваної конструкції. По-друге, це слабе переналаштування на конкретний обсяг досліджень. По-третє, це труднощі при організації досліджень та аналізі одержуваних результатів у автоматизованому режимі.

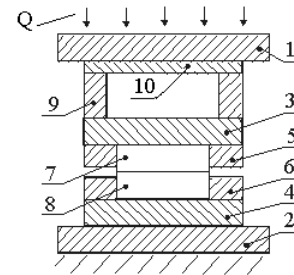
Усі перелічені проблемні аспекти можуть бути подолані шляхом розробки, залучення та адаптації на основі модифікованого варіаційного принципу Калькера альтернативних моделей та методів.

Зокрема, у роботах [11–14] розвинено модель КВД складнопрофільних тіл та методів розв'язання системи співвідношень для визначення їх НДС. Ці розробки реалізуються за допомогою МСЕ та методу граничних елементів (МГЕ). Для побудови варіативних моделей залучається метод узагальненого параметричного моделювання [15]. Таким чином, удається подолати перелічені вище недоліки існуючих підходів. Враховуючи ці обставини, для аналізу НДС елементів ПФ у цій роботі розроблено спеціалізований програмно-модельний комплекс для забезпечення заданих їх техніко-технологічних характеристик, який поєднує чисельні та аналітичні методи і моделі.

Розрахункові моделі напружено-деформованого стану прес-форм із урахуванням контактної взаємодії. Напружено-деформований стан елементів ПФ визначається системою рівнянь теорії пружності [16], що діють у областях $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, N_\Omega$, де N_Ω – кількість деталей, що складають прес-форму та інші тіла, які перебувають у взаємодії із ними. Так, одним із найпростіших варіантів є система, зображена на рис. 1.

Тут між нерухомою 2 та рухомою 1 плитами термопластавтомата розміщуються деталі 3÷10. На

рухому плиті діє зусилля замикання прес-форми Q . На напівматриці 7, 8 діє тиск робочого матеріалу p (рис. 2).



- 1 – рухома плита термопластавтомата;
2 – нерухома плита термопластавтомата;
3 – підкладна плита; 4, 10 – плити;
5, 6 – обойма; 7, 8 – напівматриці; 9 – опори

Рисунок 1 – Схема взаємодії елементів прес-форм

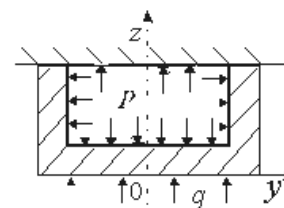


Рисунок 2 – Розрахункова схема напівматриці

Між тілами $\Omega_1 \div \Omega_{10}$ на поверхнях їхнього сполучення S_{ij} діють умови непроникнення:

$$w_i + w_j \leq \delta_{ij}, \quad (1)$$

де w_i, w_j – переміщення точок тіл Ω_i, Ω_j відповідно за нормаллями до поверхонь S_{ij} кожного із тіл;

δ_{ij} – початковий зазор у сполученні тіл (зазвичай для ПФ $\delta_{ij} = 0$).

Умови 1 перетворюють задачу аналізу НДС у загальному випадку у нелінійну. Це значно ускладнює дослідження впливу проектних та технологічних параметрів, а також експлуатаційних режимів навантаження, на характеристики міцності та жорсткості елементів ПФ. Оскільки на етапі проектних досліджень необхідно варіювати достатньо обширну множину параметрів, то пошук раціональних технічних рішень вимагатиме багатократних розв'язань нелінійних задач визначення НДС елементів ПФ із урахуванням умов КВД. Отже, в умовах дефіциту часу на етапі проектних досліджень досить ефективними були би моделі та методи, що суттєво скорочують обсяг необхідних обчислювальних ресурсів.

Варіаційна постановка задачі та чисельно-аналітичний метод аналізу НДС елементів ПФ. Одним із перспективних підходів до аналізу НДС системи контактуючих тіл є варіаційна постановка

задачі на основі теорії варіаційних нерівностей [17, 18]. Згідно із нею задача визначення НДС системи контактуючих тіл зводиться до проблеми мінімізації функціоналу повної внутрішньої енергії [18, 19]:

$$J = \frac{1}{2} a(u, u) - b(u) \rightarrow \min, \quad u \in K, \quad (2)$$

де u – поля переміщень точок контактуючих тіл;
 a – квадратична форма, задана на полях u ;
 b – лінійна форма переміщень;
 K – множина функцій, що задовольняє умовам (1).

Зокрема,

$$a(u, u) = \sum_{S=1}^{N_Q} \int \sigma_{ij}^{(S)}(u) \cdot \varepsilon_{ij}^{(S)}(u) d\Omega_S, \quad (3)$$

$$b(u) = \sum_{S=1}^{N_Q} \int f_i^{(S)} u_i^{(S)} dS, \quad (4)$$

де $\sigma_{ij}^{(S)}, \varepsilon_{ij}^{(S)}$ – компоненти тензорів напружень і деформацій та вектора переміщень у тілах Ω_S ;

$f^{(S)}$ – навантаження на поверхні S_S окремих тіл.

При дискретизації функціоналу (2) із залученням МСЕ одержуємо задачу

$$J^{\wedge} \approx \frac{1}{2} \sum_{p,r} C_{pr} u_p u_r - \sum_p f_p u_p \rightarrow \min, \quad (5)$$

де C_{pr} – елементи матриці жорсткості конструкції;

u_p – шукані вузлові параметри скінченно-елементної моделі (тут – вузлові переміщення);

f_p – вузлові сили, відповідні параметрам u_p .

Мінімізація дискретизованого функціоналу (5) здійснюється на множині, яка є проєкцією умов (1) на скінченновимірний простір параметрів u_p :

$$u_g + u_h \leq \delta_{gh}. \quad (6)$$

Від такого загального формулювання можна перейти до частинного.

По-перше, слід звернути увагу, що лінійна форма у (5) лінійно залежить від параметрів навантаження Q та p :

$$b^{\wedge} = \sum f_p u_p = Q b_1 + p b_2, \quad (7)$$

де b_1, b_2 – деякі лінійні комбінації вузлових змінних u_p .

По-друге, співвідношення (6) при $\delta_{gh} = 0$ (що є справедливим для багатьох випадків конструктивного виконання ПФ) виконуються як для деяких

номінальних значень $u_g^{(0)}, u_h^{(0)}$, так і для їх значень, однаково збільшених у α разів:

$$u_g^{(0)} + u_h^{(0)} \leq 0 \Rightarrow \alpha u_g^{(0)} + \alpha u_h^{(0)} \leq 0. \quad (8)$$

тут α – деякий довільний множник.

Якщо тепер подати (7) як

$$b^{\wedge} = \alpha Q^{(0)} [b_1 + \frac{p^{(0)}}{Q^{(0)}} b_2] = \alpha Q^{(0)} [b_1 + \gamma b_2], \quad (9)$$

де $Q^{(0)}, p^{(0)}$ – деякі номінальні значення притискової сили Q і тиску p ,

то можна зауважити, що при певному співвідношенні $\gamma = \text{const}$ між $Q^{(0)}$ та $p^{(0)}$ розв'язок задачі (5) є лінійним за параметром α . Це твердження випливає із того, що квадратичний функціонал (5) за лінійних обмежень, які містять початок координат у просторі змінних u_p , при зміні навантажень у α разів досягає і умовних, і безумовних мінімумів на одних і тих же променях відповідно. Отже, розв'язок при $\gamma = \text{const}$ лінійно залежить від рівня навантаження.

Таким чином, за цих умов достатньо один раз розв'язати задачу визначення НДС елементів ПФ за певних $Q^{(0)}$ та $p^{(0)} = \gamma Q^{(0)}$, а надалі за довільних $Q = \alpha Q^{(0)}$ та $p = \alpha p^{(0)}$ одержувати поточний розв'язок за лінійними залежностями $u = \alpha u^{(0)}$, $\sigma = \alpha \sigma^{(0)}$, $\varepsilon = \alpha \varepsilon^{(0)}$, де $u^{(0)}, \sigma^{(0)}, \varepsilon^{(0)}$ – переміщення, напруження та деформації при номінальних навантаженнях, а u, σ, ε – при довільних поточних.

Сформульоване твердження складає основу нового підходу до розв'язання задач визначення НДС елементів ПФ із урахуванням умов КВД. Він полягає у тому, що на основі математичної моделі НДС контактуючих елементів ПФ, яка зводить вихідну задачу до задачі квадратичного програмування, пропонується чисельно-аналітичний метод визначення напружено-деформованого стану цієї системи тіл (див. вище). Це дає змогу багаторазово зменшити обсяг обчислень при проектних дослідженнях міцності та жорсткості елементів ПФ. Таким чином, різко зростає оперативність досліджень без втрати точності одержуваних результатів. Відповідно, збережеться достовірність одержуваних на основі аналізу НДС елементів ПФ рекомендацій та ефективність обґрунтованих проектних рішень.

Приклад чисельних досліджень. Для проектних ПФ виникає низка задач, пов'язаних із напружено-деформованим станом їх елементів. По-перше, це визначення працездатності за умовами міцності найбільш відповідальних та навантажених деталей. По-друге, це визначення якості та

точності виготовлення деталей у прес-формах, яке залежить від різних чинників, зокрема, від деформування напівматриць.

Останнє може призвести до спотворення номінальної форми та розмірів деталі, яка виготовляється. Це може бути викликане зміною товщини деталей внаслідок роздуття формотвірної порожнини або локального розкриття стику напівматриць та утворення облою на периферії цих деталей. Таким чином, потребує аналізу напружено-деформованого стану усіх елементів ПФ, особливо – напівматриць.

Для прикладу було досліджено НДС дослідної ПФ, наведеної на рис. 3, без додаткових опор 6. Базове навантаження $Q^{(0)} = 250 \text{ кН}$, $p^{(0)} = 2,5 \text{ МПа}$. Варіювання рівня навантаження здійснювалося шляхом зміни α у межах $0,1 \div 10$, тобто $Q \in [25 \text{ кН}; 2,5 \text{ МН}]$, $p \in [0,25; 25] \text{ МПа}$.

У табл. 1 (див. рис. 1) наведено розподіл контактного тиску у спряженнях елементів прес-форм, у табл. 2, 3 наведено розподіл еквівалентних напружень за Мізесом та повних переміщень у

елементах ПФ, а на рис. 4 наведено залежність відносних максимальних значень контактного тиску, напружень за Мізесом, переміщень від рівня навантажень.

Як видно із наведених розподілів, області контакту та закон розподілу контактного тиску є практично співпадаючим для різних рівнів навантажень. При цьому виконується прямо пропорційна залежність між компонентами НДС та діючими навантаженнями.

Висновки. Одержані результати слугують основою для наступних висновків.

1. У роботі обґрунтована варіаційна постановка задачі про визначення напружено-деформованого стану системи контактуючих тіл за наявності між ними контакту на співпадаючих частинах площин. При цьому визначено, що у цьому випадку між компонентами напружено-деформованого стану та навантаженням виконується прямо пропорційна залежність, незважаючи на нелінійність контактної задачі у загальному випадку.

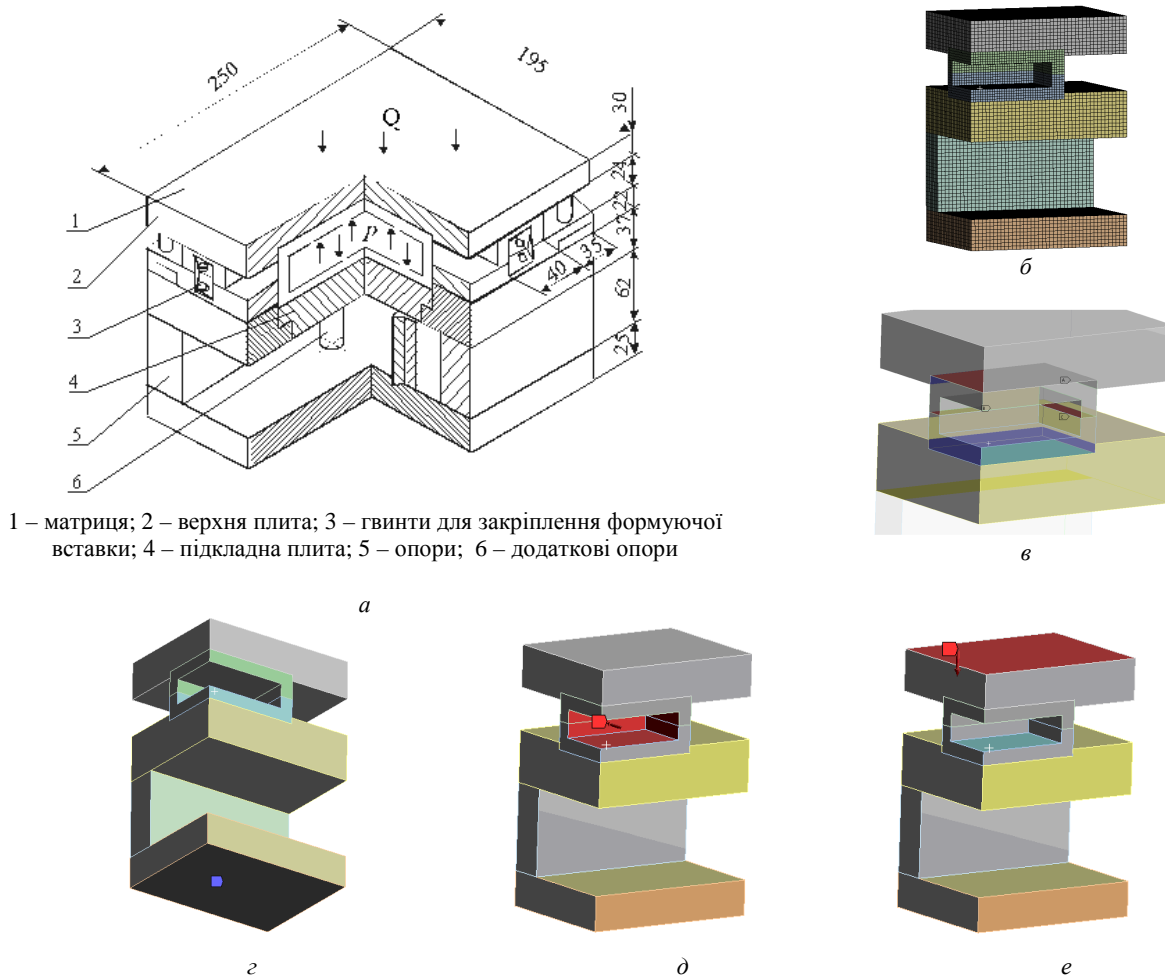


Рисунок 3 – Конструкція дослідної прес-форми, скінченно-елементна модель, контакти у спряженні та крайові умови:

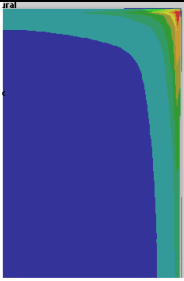
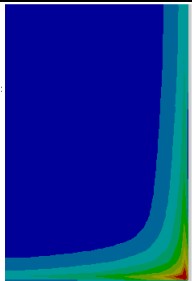
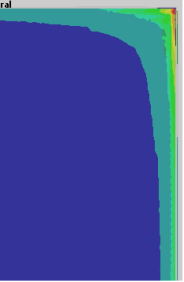
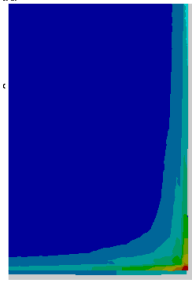
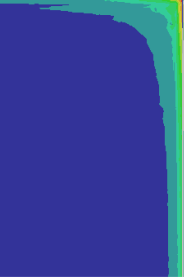
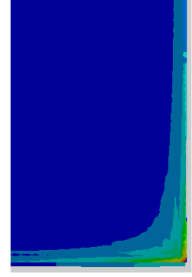
а – конструкція дослідної прес-форми; б – скінченно-елементна модель ПФ;

в – контакти у спряженні напівматриць; г – крайові умови закріплення на нерухомій плиті термопластавтомату;

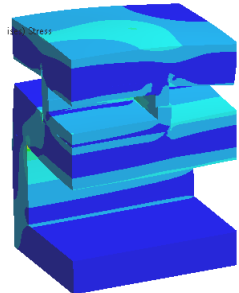
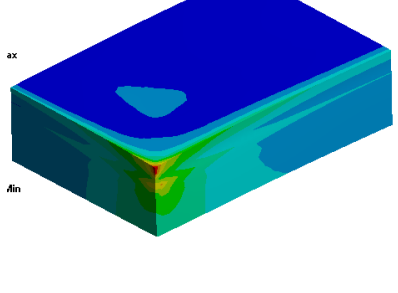
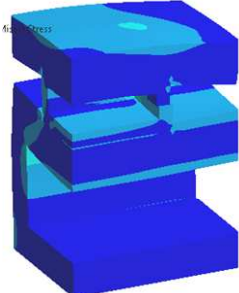
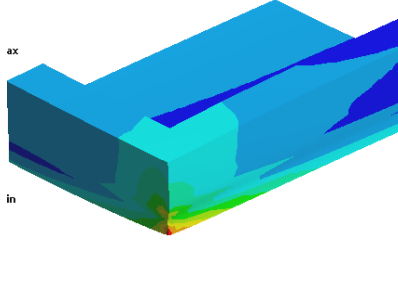
д – внутрішній тиск робочої рідини у порожнині напівматриць;

е – сила змикання прес-форми, прикладена до рухомої плити прес-форми

Таблиця 1 – Розподіл контактної тиску у спряженнях елементів прес-форм, МПа

Набір параметрів	Значення контактної тиску	Розподіл контактної тиску	Значення контактної тиску	Розподіл контактної тиску
	<i>рухома напівматриця</i>		<i>нерухома напівматриця</i>	
$p = 0,25$ МПа, $Q = 25$ кН	78,059 M 69,386 60,712 52,039 43,366 34,693 26,02 17,346 8,6732 0 Min		78,059 Max 69,386 60,712 52,039 43,366 34,693 26,02 17,346 8,6732 0 Min	
$p = 2,5$ МПа, $Q = 250$ кН	1085,7 M 965,08 844,45 723,81 603,18 482,54 361,91 241,27 120,64 0 Min		1085,7 I 965,08 844,45 723,81 603,18 482,54 361,91 241,27 120,64 0 Min	
$p = 25$ МПа, $Q = 2,5$ МН	12833 M 11407 9981,3 8555,4 7129,5 5703,6 4277,7 2851,8 1425,9 0 Min		12833 M 11407 9981,3 8555,4 7129,5 5703,6 4277,7 2851,8 1425,9 0 Min	

Таблиця 2 – Розподіл еквівалентних напружень за Мізесом в елементах прес-форм, МПа

Набір параметрів	Значення контактної тиску	Розподіл контактної тиску	Значення контактної тиску	Розподіл контактної тиску
	<i>рухома напівматриця</i>		<i>нерухома напівматриця</i>	
$p = 0,25$ МПа, $Q = 25$ кН	77,653 Max 69,026 60,398 51,771 43,143 34,516 25,888 17,261 8,633 0,005502 Min		76,713 M 68,245 59,776 51,307 42,838 34,369 25,901 17,432 8,9631 0,49433 I	
$p = 2,5$ МПа, $Q = 250$ кН	1081,1 Max 961,02 840,9 720,78 600,66 480,54 360,42 240,3 120,18 0,057007 Min		1007,6 M 899,59 791,63 683,66 575,69 467,73 359,76 251,79 143,83 35,861 M	

Набір параметрів	Значення контактного тиску	Розподіл контактного тиску	Значення контактного тиску	Розподіл контактного тиску
$p = 25 \text{ МПа}$, $Q = 2,5 \text{ МН}$				

Таблиця 3 – Розподіл повних переміщень у елементах прес-форм, мм

Набір параметрів	Значення контактного тиску	Розподіл контактного тиску	Значення контактного тиску	Розподіл контактного тиску
<i>рухома напівматриця</i>		<i>нерухома напівматриця</i>		
$p = 0,25 \text{ МПа}$, $Q = 25 \text{ кН}$				
$p = 2,5 \text{ МПа}$, $Q = 250 \text{ кН}$				
$p = 25 \text{ МПа}$, $Q = 2,5 \text{ МН}$				

2. На прикладі дослідної конструкції прес-форми шляхом чисельного моделювання підтверджені прогнозовані закономірності: пляма контакту залишається незмінною при зміні рівня навантажень, а контактний тиск і компоненти напружено-деформованого стану прямо пропорційні діючим силам.

3. Продемонстровано, що при розрахунках напружено-деформованого стану елементів прес-форм із урахуванням умов контактної взаємодії можливе

застосування чисельно-аналітичного способу, який полягає у здійсненні одиничного розрахунку напружено-деформованого стану при номінальному навантаженні. При зміні ж цього рівня навантажень відповідно змінюються усі компоненти напружено-деформованого стану. Це суттєво підвищує оперативність проектних досліджень при збереженні їх точності та обґрунтованості розроблюваних технічних рішень за критеріями міцності, жорсткості та працездатності досліджуваних конструкцій прес-форм,

точності та якості виготовлення деталей.

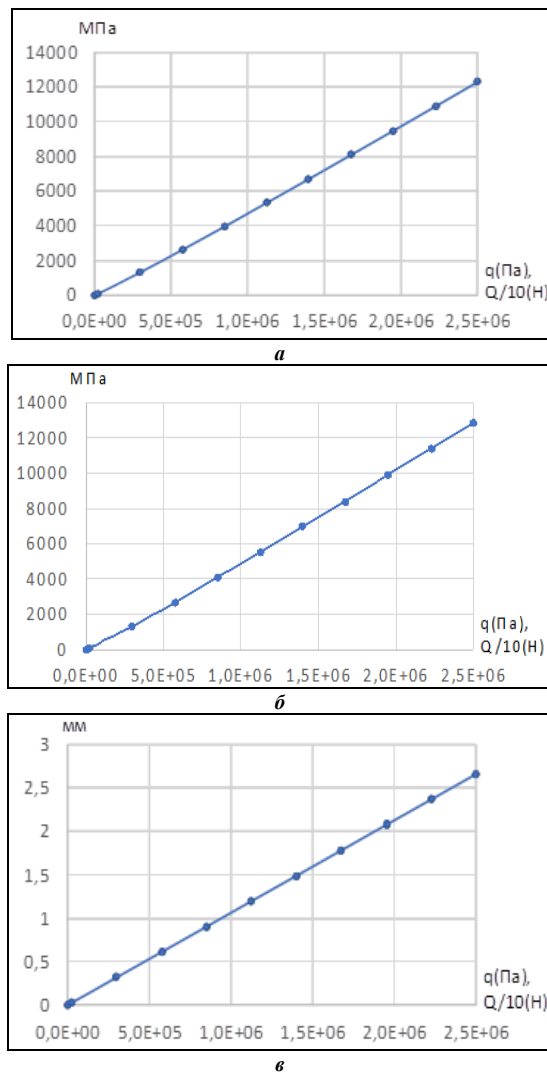


Рисунок 4 – Залежність відносних максимальних значень контактного тиску $\bar{p} = p / p^{(0)}$ (а), напружень за Мізесом $\bar{\sigma} = \sigma_y / \sigma_y^{(0)}$ (б), переміщень $\bar{w} = w / w^{(0)}$ (в) від рівня навантажень $\alpha = Q / Q^{(0)}$

У подальшому пропонується розвинути запропонований підхід до розв'язання більш широкої множини задач.

Список літератури

1. Суберляк О.В., Баштанник П. І. *Технологія переробки полімерних та композиційних матеріалів: підруч.*. Львів: Растр-7, 2007. 375 с.
2. Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук Н.А., Грабовський А.В. *Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Монография.* Харьков: ФОП Панов А.Н., 2017. 148 с.
3. Ткачук М.А., Атрошенко О.О., Мартиненко О.В., Ткачук М.М., Грабовський А.В., Саверська М.С. Контактна взаємодія елементів силосів, які з'єднані болтовим з'єднанням. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2019. No 3/7(93). P. 34–41.
4. Ткачук А.Н., Мовшович І.Я., Ткачук Н.А. Термоупругі контактні задачі для елементів штампів і пресс-форм. *КІШП. ОМД.* М.: ООО «Тисо Принт», 2009. № 12. С. 25–32; / 2010. № 1. С. 19–28.

5. Мартинюк Р.М., Прокопишин І. А., Прокопишин І. І. Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2013. Т. 56, № 3. С. 43–56.
6. Бугрій О.М. Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням. *Укр. мат. вісн.* 2008. Т. 5, № 4. С. 435–469.
7. Музичук Ю.А., Халко Р.С. Про метод граничних інтегральних рівнянь розв'язування крайових задач для систем еліптичних рівнянь спеціального виду у частково необмежених областях. *Доповіді Національної академії наук України.* 2012. № 11. С. 20–27.
8. Львов Г. И. Вариационная постановка контактной задачи для линейно-упругих и физически нелинейных пологих оболочек. *Прикл. математика и механика.* 1982. Т. 46, № 5. С. 841–846.
9. Zienkiewicz O. C., R. L. Taylor, Zhu J. Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals [Text].* – 7th ed. – Oxford: Butterworth-Heinemann. 2013. 756 p.
10. Киричевский В.В. *Метод конечных элементов в механике эластомеров.* К.: Наук. думка, 2002. 653 с.
11. Ткачук М.М. Аналіз контактної взаємодії складнопровільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2011. № 22. С. 123–140.
12. Скрипченко Н. Б., Ткачук М. М., Неділько К. Д., Киричук Д.В., Борисенко С.В., Касай О.І. Контактна взаємодія складнопровільних деталей з урахуванням локальної податливості поверхневого шару. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2016. №39 (1211). С. 93–101.
13. Ткачук М.М. Теоретичні основи забезпечення високих технічних характеристик машин військового та цивільного призначення на основі дослідження міцності складнопровільних деталей. *Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут».* Харків, НТУ «ХПІ». 2017. № 12(1234). С. 86–95.
14. Ткачук М., Скрипченко Н., Бондаренко М., Набоков А. Контактна взаємодія складнопровільних тіл: моделі, методи, закономірності. *13-й міжнародний симпозіум українських інженерів механіків у Львові: Матеріали симпозіуму.* Львів, КІН-ПАТРИЛТД, 2017. С. 52–54.
15. Ищенко О.А., Ткачук Н.Н., Кротенко Г.А., Ткачук Н.А. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки с применением параметрических моделей. *Ресурсосбережения та енергоефективність процесів та обладнання обробки тиском у машинобудуванні і металургії: Матеріали VIII міжнародної науково-технічної конференції.* Харків, НТУ «ХПІ», 2016. С. 27–30.
16. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности.* Москва: Мир, 1987. 542с.
17. Haslinger J., Kučera R., Sassi T. A domain decomposition algorithm for contact problems: Analysis and implementation. *Math. Model. Nat. Phenom.* 2009. Т. 4, no. 1. P. 123–146.
18. Кравчук А.С. Вариационный метод контактных задач. Состояние проблемы, направления развития. *ПММ.* 2009. Вып. 73, № 3. С. 492–502.
19. Haslinger J., Hlaváček I. Approximation of the Signorini problem with friction by a mixed finite element method. *J Math. Anal. Applic.* 1982. Vol. 86. P. 99–122.

References (transliterated):

1. Suberlyak O.V., Bashtannik P. I. *Technologiya pererobki polimernix ta kompozicijnyx materialiv: pidruch.* [Technological processing of polymer and composite materials]. L'viv: Rastr-7, 2007. 375 p.
2. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A., Grabovskij A.V. *Kontaknoe vzaimodejstvie slozhnoprofil'ny'x detalej mashinostroitel'ny'x konstrukcij s uchetom lokal'noj podatlivosti poverchnostnogo sloja. Monografiya.* [Contact interaction of complex-shaped parts of machine-building structures, taking into account the local durability of the surface layer]. Kharkov: FOP Panov A.N., 2017. 148 p.
3. Tkachuk M.M., Atroshenko O.O., Martinenko O.V., Tkachuk M.M., Grabovskij A.V., Savers'ka M.S. Kontaktна взаємодія елементів силосів, які з'єднані болтовим з'єднанням [Contact mutual elements of silos, which are known as boltovim]. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2019. no. 3/7(93). P. 34–41.
4. Tkachuk A.N., Movshovich I.Ya., Tkachuk N.A. Termouprugie

- kontaktny'e zadachi dlya e'le-mentov shtampov i press-form [Thermoelastic contact problems for elements of dies and molds]. *KShP. OMD*. Moscow: OOO «Tiso Print», 2009. no. 12. P. 25–32; 2010, no. 1. P. 19–28.
5. Martynyuk R.M., Prokopishin I. A., Prokopishin I. I. Kontakt pruzhnix til za nayavnosti nelinejnykh vinkleriv'kix poverkhniv shariv [Contact of elastic bodies in the presence of nonlinear Winkler surface layers]. *Mat. metodi ta fiz.-mex. polya*. 2013. Vol. 56, no. 3. P. 43–56.
 6. Bugrij O.M. Pro zadachi z odnorodnimi granichnimi umovami dlya nelinejnykh rivnyan' z virodzhenyamy [On problems with homogeneous boundary conditions for nonlinear degenerate equations]. *Ukr. mat. visn.* 2008. Vol. 5, no. 4. P. 435–469.
 7. Muzichuk Yu.A., Xapko R.S. Pro metod granichnykh integral'nykh rivnyan' rozv'yazuvannya krajovyx zadach dlya sistem eliptichnykh rivnyan' special'nogo vidu u chastkovo neobmezhennykh oblastyax [On the method of boundary integral equations for solving boundary value problems for systems of elliptic equations of a special form in partially unbounded domains]. *Dopovidi Nacional'noy akademiy nauk Ukraini*. 2012, no. 11. P. 20–27.
 8. L'vov G. I. Variatsionnaya postanovka kontaktnoy zadachi dlya linejno-uprugix i fizicheski nelinejnykh pologix obolochek [Variational formulation of the contact problem for linearly elastic and physically nonlinear shallow shells]. *Prikl. matematika i mexanika*. 1982. Vol. 46, no. 5. P. 841–846.
 9. Zienkiewicz, O. C., R. L. Taylor, J. Z. Zhu The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals [Text]. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann. 2013. 756 p.
 10. Kirichevskiy V.V. Metod konechnykh e'lementov v mexanike e'lastomerov [The finite element method in elastomer mechanics]. Kiev: Nauk. dumka, 2002. 653 p.
 11. Tkachuk M.M. Analiz kontaktnoy vzaemodiy skladnoprofil'nykh elementiv mashinobudivnykh konstrukcij z kinematichno spryazhenimi poverkhnymi [Analysis of the contact interaction of complex elements of machine-building constructions with kinematically conjugated surfaces]. *Visnik Nacional'nogo tekhnichnogo universitetu «Kharkivskij politexnichnij institut»*. Kharkiv, NTU «KhPI», 2011, no. 22. P. 123–140.
 12. Skripchenko N. B., Tkachuk M.M., Nedil'ko K. D., Kirichuk D.V., Borisenko S.V., Kasaj O.I. Kontaktna vzaemodiya skladnoprofil'nykh detalej z uraxuvannyam lokal'noi podatlivosti poverx-nevogo sharu [Contact interaction of complex profile details, taking into account the local compliance of the surface layer]. *Visnik Nacional'nogo tekhnichnogo universitetu «Kharkivskij politexnichnij institut»*. Kharkiv, NTU «KhPI», 2016, no. 39 (1211). P. 93–101.
 13. Tkachuk M.M. Teoretichni osnovi zabezpechennya visokix tekhnichnykh xarakteristik mashin vijs'kovogo ta civil'nogo priznachennya na osnovi doslidzhennya micnosti sklad-noprofil'nykh detalej [Theoretical basis for providing high technical characteristics of military and civilian vehicles based on the study of the strength of complex profile details]. *Visnik Nacional'nogo tekhnichnogo universitetu «Kharkivskij politexnichnij institut»*. Kharkiv, NTU «KhPI», 2017, no. 12 (1234). P. 86–95.
 14. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Bondarenko M., Nabokov A. Kontaktna vzaemodiya skladnoprofil'nykh til: modeli, metodi, zakononomosti [Contact interaction of complex-body bodies: models, methods, regularities]. *13-j mizhnarodnij simpozium ukrains'kix inzheneriv mexanikiv u L'vovi: Materiali simpoziumu*. L'viv, KINPATRI LTD, 2017. P. 52–54.
 15. Ishhenko O.A., Tkachuk N.N., Krotenko G.A., Tkachuk N.A. Komp'yuternoe modelirovanie kontaktnoy vzaemodiy elementov shtampovoy osnastki s pri-meneniem parametricheskix modelej [Computer simulation of the contact interaction of elements of die tooling using parametric models]. *Resursozbe-rezhennyya ta energoefektivnist' procesiv ta obladnannya obrobki tiskom u mashinobudivanni i metalurgii: Materiali VIII mizhnarodnoy naukovy-tekhnichnoy konferenciy*. Kharkiv, NTU «KhPI», 2016. P. 27–30.
 16. Vasidzu K. Variatsionny'e metody v teorii uprugosti i plastichnosti. [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Mir, 1967. 542 p.
 17. Haslinger J., Kučera R., Sassi T. A domain decomposition algorithm for contact problems: Analysis and implementation. *Math. Model. Nat. Phenom.* 2009. Vol. 4, no. 1. P. 123–146.
 18. Kravchuk A.S. Variatsionny'j metod kontaktnykh zadach. Sostoyanie problemy, napravleniya razvitiya [Variational method of contact problems. State of the problem, directions of development]. *PMM*. 2009. Vol. 73, no. 3. P. 492–502.
 19. Haslinger J., Hlaváček I. Approximation of the Signorini problem with friction by a mixed finite element method. *J Math. Anal. Applic.* 1982. Vol. 86. P. 99–122.

Поступила (received) 06.06.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Микола Анатолійович (Ткачук Николай Анатольевич, Tkachuk Mykola) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4174-8213>; e-mail: tma@tmm-sapr.org.

Грабовський Андрій Володимирович (Грабовский Андрей Владимирович, Grabovskiy Andrey) – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: andrej8383@gmail.com.

Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola Mykolayovych) – кандидат технічних наук (PhD in Eng. S.), Національний технічний університет "Харківський політехнічний інститут", старший науковий співробітник кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: m.tkachuk@tmm-sapr.org

Зарубіна Алла Олександрівна (Зарубина Алла Олександрівна, Zarubina Alla) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3334-792X>; e-mail: zaralla8@gmail.com.

Саверська Марія Сергіївна (Саверская Мария Сергеевна, Saverska Mariia) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9271-9586>; e-mail: m.saverska@tmm-sapr.org

Мухін Дмитро Сергійович (Мухин Дмитрий Сергеевич, Mukhin Dmiyriy) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри "Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин"; Харків, Україна; e-mail: s814@tmm-sapr.org.

Куценко Сергій Володимирович (Куценко Сергей Владимирович, Kutsenko Serhii) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин»; м. Харків, Україна, e-mail: skutsenko@tmm-sapr.org.